L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE À L'ÈRE INFORMATIQUE [1]

par Georges PAPY

Pendant cent siècles de civilisation agricole et artisanale, l'homme fait tout son travail lui-même en s'aidant de l'outil qu'il a inventé pour prolonger son bras, des animaux qu'il a domestiqués, des énergies renouvelables offertes par la nature; et il développe une mathématique typiquement écologique dans le cadre de l'espace physique à peine idéalisé, où les objets géométriques servent de support et d'appréhension à toute sa démarche mathématique.

Quelques siècles de civilisation industrielle, où la machine à énergie non renouvelable décharge l'homme d'une partie de son labeur physique, installent de gigantesques structures industrielles, économiques, éducatives, scientifiques, artistiques, culturelles et relationnelles tandis qu'en écho dans le cadre de grandes structures ensemblistes, algébriques, topologiques, catégorielles se développent à foison le calcul numérique, le calcul décimal, le calcul algébrique, le calcul infinitésimal, le calcul différentiel, le calcul intégral, le calcul des différences, le calcul vectoriel, le calcul matriciel, le calcul binaire, le calcul ensembliste, le calcul des probabilités, le calcul opérationnel, le calcul analogique, le calcul trigonométrique, le calcul des propositions, le calcul logique, le calcul de Boole, le calcul de la résistance des matériaux, le calcul tensoriel, le calcul des variations, le calcul des orbites, le calcul transfini…

À l'aube de la civilisation informatique que nous préférons nommer conceptuelle pour des raisons qui transparaissent dans la suite de ce rapport, la machine se charge, de plus, d'une partie des tâches qui requéraient l'effort cérébral. Après le travail artificiel, l'homme a créé l'intelligence artificielle. Ce qui faisait le pain quotidien du mathématicien est de plus en plus du ressort de l'ordinateur. Le métallo n'est pas seul aux prises avec l'inéluctable mutation. Presque toute la mathématique actuellement enseignée est devenue inutile; et, comme on le comprend aisément, ceci est particulièrement vrai de la mathématique encore dite appliquée. Comme la mathématique vit par ceux qui veulent l'apprendre, si l'on n'y prend garde, le naufrage sera total, engloutissant pour longtemps des trésors culturels. Le client est roi. Les plaintes concernant son éventuel mauvais goût n'y changent rien.

Ils ne savent plus calculer. Sans doute conviendrait-il de relativiser le propos car il perdure depuis si longtemps, que seule la génération d'Adam et Eve semblerait à l'abri du reproche d'avoir systématiquement péché contre le calcul. Et puis, les jeunes d'aujourd'hui n'ont-ils pas mille fois raison de ne plus savoir, ni aimer, ni vouloir calculer? Inventeur du calcul différentiel et du calcul binaire, Leibniz jugeait les longs calculs indignes d'hommes excellents. Disposant aujourd'hui pour ces tâches d'instruments fiables et efficaces, il s'indique plutôt de permettre aux jeunes d'apprendre à connaître, dompter, dominer et utiliser l'électronique animal.

Loin de se borner aux seuls calculs numériques, l'ordinateur effectue également les calculs littéraux, abstraits, conceptuels exacts et non numériques du mathématicien en recherche. La pratique artisanale d'aucun calcul ne peut plus être un but en soi de l'éducation mathématique actuelle et devrait à peu près se restreindre aux modestes exemples nécessaires à la compréhension conceptuelle des opérations.

L'objectif jadis hautement proclamé de l'enseignement traditionnel de la mathématique visant à inculquer les automatismes du calcul est aujourd'hui devenu inutile, socialement nuisible et intellectuellement dommageable : dérisoirement inutile, car en fait d'automatisme et de rapidité, l'électronique fait mieux, socialement nuisible, car il contribue à repousser les

---

[1] Texte publié dans le BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHEMATIQUE DE BELGIQUE (SÉRIE A), TOME XXXVI, FASCICULE 2, (1984)

esprits dépourvus de l'inutile faculté d'assimiler les automatismes du calcul, intellectuellement dommageable, car il prône la perte du contrôle conceptuel conscient de l'opération au profit de l'inconscient d'un automatisme.

L'assimilation des automatismes du calcul est aujourd'hui un phénomène de régression qui ferme la porte à la multiplicité conceptuelle des calculs dans le monde contemporain.

Prend aujourd'hui le relais cette nouvelle plainte : *Ils ne savent plus démontrer!* S'ils le surent jamais, comment leur reprocher aujourd'hui de ne pas comprendre ce qu'est une démonstration, alors que l'idée que s'en firent les mathématiciens a tellement évolué au cours du temps et que leurs conceptions personnelles à ce sujet restent fort diverses. Comment motiver un débutant à démontrer un fait qui lui saute aux yeux, souvent à partir de prémisses qui lui paraissent moins évidentes. N'est-ce pas plutôt parfois l'axiome qui mériterait d'être justifié à partir du théorème? Les axiomatiques d'une même théorie sont multiples. Exiger une preuve déterminée, c'est imposer un point de vue souvent arbitraire. Leibniz qui trouvait les longs calculs indignes d'hommes excellents caressa l'espoir de réduire la déduction mathématique au calcul, et comme ce rêve, traduit en réalité par Boole, triomphe en l'ordinateur, les longues démonstrations n'en deviennent-elles pas elles aussi indignes de femmes et d'hommes excellents?

L'éducation mathématique doit se libérer de la double ornière du calcul et de la démonstration, et s'épanouir en son authenticité conceptuelle.

Dès l'école fondamentale, tous les calculs un peu longs doivent être effectués électroniquement. La calculette et puis l'ordinateur doivent faire partie de l'équipe du jeune élève au même titre que le double-décimètre, le compas… et ses lunettes éventuelles. L'exigence de calculs comme les décompositions de polynômes en facteurs sont aujourd'hui des manifestations d'autoritarisme pédagogique arbitraire, attentatoires à la dignité de l'élève.

La démonstration doit retrouver son statut de démarche de conviction, à caractère social ou à usage individuel, procédant d'une certitude acquise, peu importe comment, vers l'encore inconnu ou le douteux. Ne semblerait-il pas indélicat au commun des mortels de prier les personnes de son entourage de lui rappeler comment il les a convaincues de telles et telles précieuses vérités? Les voies d'accès à la connaissance, aussi impénétrables que celles de la Providence, font partie de notre jardin secret, et il y a grande indiscrétion à inviter quiconque à se dévoiler à ce sujet. Un théorème est la naissance d'une vue plus large acquise en s'élevant à un niveau supérieur de compréhension, une libération du niveau antérieur. Une fois la conviction acquise, exiger la restitution ou la démonstration qui permit d'y parvenir, est une entreprise dangereuse qui maintient et renforce artificiellement le cordon ombilical que l'on voulait précisément couper. Moyens de conviction, les démonstrations que nous présentons ont achevé leur tâche quand elles ont convaincu. Leur reproduction *a posteriori* par les élèves ne prouve en rien leur aptitude au raisonnement mathématique, qui ne déploie ses vertus qu'en climat de liberté créative, en exploration de situations nouvelles. Quand un élève – spontanément, ou à la suite d'une question – énonce une affirmation mathématique, il est tout naturel de lui demander pourquoi? et de le prier de nous convaincre de sa vérité. Entre gens civilisés, il nous répondra en partant de nos convictions communes et en tenant compte de nos intelligences et psychologies respectives. Même parfaitement rigoureuse, la réponse n'enfilera pas l'armure guindée de la logique formelle.

L'obligatoire expression en une langue comprise par l'ordinateur motive enfin des présentations formelles minutieuses; mais contrairement à ce qui est parfois dit, l'ordinateur n'est pas d'une rigueur aveugle. Il est assez malin pour rectifier des coquilles, dont la correction va de soi. Ne soyons pas plus étroits d'esprit que notre frère électronique.

L'exécution électronique des calculs un peu longs et le refus d'exiger que les élèves restituent des démonstrations présentées par l'enseignant ne constituent pas une proscription de toute démonstration et de tout calcul artisanal à l'école. Le recours usuel au calcul électronique exige et favorise une meilleure compréhension conceptuelle des opérations.

Il n'y avait aucune raison de craindre que l'introduction de l'ordinateur dans l'organisme millénaire de la mathématique vivante crée les mêmes réactions de rejet qu'un corps étranger, car l'ordinateur est de la mathématique moderne à l'état pur. Condensé de mathématique universelle d'Aristote à Turing et von Neumann… , l'ordinateur est du même tissu que les catégories qui remontent à Socrate, culminent avec Kant et rebondissent sous forme mathématique avec Eilenberg-Mac Lane. Catégories et ordinateurs sont des graphes de flèches qui revendiquent le statut géométrique d'un dessin effectivement tracé, à peine esquissé, ou totalement imaginé. Quand l'appareil est connecté, chaque flèche est toute bleue ou toute rouge : l'ordinateur branché est un de ces graphes utilisés en éducation mathématique moderne, et son coloriage, variable au cours du temps, est de la pensée.

Il y a un quart de siècle, les premiers frémissements annonciateurs d'une ère nouvelle en éducation mathématique proclamaient déjà l'impérieuse nécessité de comprendre et connaître l'ordinateur, afin de n'en pas devenir l'esclave. La mutation informatique fut si brutale qu'on s'est trouvé soudain en retard, non d'une année comme à l'école, ni d'une guerre comme l'armée, ni d'une génération comme les vieux, mais de toute une civilisation.

Heureusement, l'ordinateur et sa mathématique moderne ne sont pas nihilistes. C'est l'une des branches ou des tendances de la mathématique de toujours qui s'y trouve magnifiée. L'ordinateur fonctionne fonctionnellement en conciliant enfin l'idée de fonctionnement et le concept de fonction dû à Lejeune-Dirichlet.

Le coloriage de sortie de chaque sommet du graphe ordinateur est – avec retard – fonction du coloriage d'entrée. Domaines et buts de telles fonctions sont finis et se repèrent commodément grâce au point de vue de von Neumann qui égale chaque (nombre) naturel à l'ensemble des naturels plus petits que lui, ce qui amorce la version neumannienne de la théorie des nombres transfinis ordinaux primitivement édifiée par Cantor. De manière plus précise, en l'optique neumannienne, ces ensembles finis sont des puissances de 2 ce qui introduit aussitôt la numération binaire de Leibniz, prototype de tous les codages, et si aisément porteuse des nombres réels et du théorème de Thalès. Avec retard, la couleur de chaque flèche de sortie d'un sommet de graphe d'ordinateur branché en fonction du coloriage d'entrée. Chacune de ces fonctions booliennes partage son domaine en son support où elle vaut 1, et son noyau, où elle s'annule, et se trouve donc ainsi être la fonction caractéristique – au sens de la Vallée Poussin – de son support. Nous sommes ainsi à deux pas du théorème de Cantor affirmant qu'aucun ensemble n'est équipotent à l'ensemble de ses parties, avec en corollaire la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels…

Ces fonctions sont les éléments de l'Algèbre de Boole et s'expriment polynômialement, motivant ainsi un calcul de polynômes. Elles se ramènent à certaines d'entre elles : les connectifs interpropositionnels d'Aristote, auxquels cercles d'Euler et diagrammes de Venn offrent un support géométrique et une interprétation ensembliste.

Éléments constitutifs de l'ordinateur qui est le soubassement de l'informatique, les flèches se retrouvent en certains de ses langages du plus haut niveau; elles assurent notamment la dynamique de PROLOG, le plus récent des langages informatiques de haut niveau.

Sans doute les promoteurs de la mathématique moderne ont-ils trop exclusivement insisté sur le rôle – d'ailleurs incomparable – qu'elle joue pour assurer fondement, rigueur et unité à l'ensemble de la mathématique vivante.

La mathématique moderne en soi ensembliste relationnelle sagittale bariolée est l'humanisme de l'ordinateur, la mathématique de base de la civilisation conceptuelle, et doit être l'axe et l'âme de l'éducation mathématique actuelle. C'est de ce tronc majeur que doivent partir les ramifications destinées à recueillir et à soutenir l'héritage mathématique de la civilisation industrielle. Il faut veiller sur lui comme sur la forêt amazonienne, sans ignorer le rôle positif des feuilles mortes en sa survie.

Comme le viatique mathématique indispensable à tous ceux qui ne veulent pas devenir des ilotes de l'informatique s'est considérablement étendu, il convient tout naturellement d'augmenter l'importance horaire du cours de mathématique à tous et partout. Saute aux yeux en conséquence l'impérieuse nécessité d'accroître en proportion plus considérable encore le nombre de ses enseignants… lesquels constituent sans doute notre principale richesse nationale… quand ils sont en fonction…

Par suite des progrès réalisés et des efforts consentis, le répertoire mathématique actuellement accessible à l'enseignement général est devenu si vaste qu'il n'est plus question d'en imposer la totalité à qui que ce soit. Or en cet instant de mutation, tout choix serait aléatoire et de nature à mettre en péril une partie de l'héritage qui pourrait se révéler précieuse ultérieurement. La conséquence de cette situation est aussi claire qu'heureuse : elle condamne l'existence des programmes, des commissions de programmes, des conseils de perfectionnement, des jurys d'homologation. La sagesse réside cette fois en la dérégulation de l'enseignement de la mathématique. Elle invite à faire confiance aux enseignants et aux écoles. L'avenir est à l'esprit d'initiative et à la liberté créative des petites et moyennes écoles.

En ce moment charnière, un développement heureux et nécessaire de l'éducation mathématique passe par l'installation d'un grand service public d'éducation nationale qui se bornerait à assurer la subsidiation des écoles, dans un climat de confiance, d'amour et de liberté.

Les Etats-Unis et le Japon, couramment cités pour avoir bien franchi le passage à la civilisation conceptuelle, sont deux pays qui partagent une immense confiance en l'enseignement.